

MOTO VARIO DELLE CORRENTI IN PRESSIONE (\*)

13.1 - LE EQ.NI DEL MOTO VARIO DI UNA CORRENTE

L'eq.ne del moto vario di una corrente quasi-cilindrica di fluido ideale a comportamento barotropico può essere dedotta mediante generalizzazione dell'eq.ne (già ricavata) del moto di un fluido ideale a comportamento barotropico, riferita ad una linea di corrente (V. eq.ne 6.12, cap. 6). Risulta, essendo  $U = U(s, t)$  la velocità media della corrente,

$$(13.1) \quad \frac{\partial H}{\partial s} = - \frac{\beta}{g} \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{con} \quad H = z + \int \frac{dp}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g}$$

in cui i coefficienti  $\alpha$  (coeff. riduttore dell'En.Cin.) e  $\beta$  (coeff. ridotto re della Q.d.M.) sono introdotti per tener conto della distribuzione non uniforme della velocità nelle sezioni trasversali della corrente.

L'eq.ne del moto vario di una corrente quasi cilindrica di fluido reale (viscoso) a comportamento barotropico può essere ottenuta dalla eq.ne (13.1) aggiungendo a secondo membro il termine  $-j$ , essendo  $j = j(s, t)$  la perdita di energia meccanica per unità di peso di fluido e per unità di percorso , cioè

$$(13.2) \quad \frac{\partial H}{\partial s} = - \frac{\beta}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - j$$

In generale, si esprime la perdita  $j$  del moto vario con la stessa relazione che fornisce la perdita  $i$  del moto uniforme (V. eq.ne 12.10, cap. 12), precisata con i valori locali (alle ascisse  $s$ ) e attuali (ai tempi  $t$ ) della velocità media  $U$  e scritta nella forma

$$(13.3) \quad j = \frac{\lambda}{D} \frac{U|U|}{2g}$$

per tener conto dell'eventuale cambiamento di segno della  $U$  (il termine  $-j$  deve avere sempre segno contrario a quello di  $U$ ). (\*\*)

L'eq.ne di continuità di una corrente è data dall'eq.ne (V. eq.ne 5.14), cap. 5)

$$(13.4) \quad \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho \Omega)}{\partial t} = 0$$

(\*) - Stesura del prof.ing. Giulio Scarsi

(\*\*) - Sostanzialmente alla stessa eq.ne (13.2) particolarizzata con la (13.3) si giunge applicando alla corrente quasi cilindrica il teorema della quantità di moto.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (13.1)$$

e può essere associata, ovviamente, sia all'eq.ne (13.1) sia all'eq.ne (13.2).

13.2 - Le eq.ni introdotte sono qui utilizzate per studiare transitori di moto vario. Per fissare le idee, consideriamo un impianto idroelettrico ad alta caduta (\*), costituito da: un serbatoio di notevole capacità (in generale un lago), una galleria in pressione, un pozzo piezometrico, una condotta forzata che ha termine con un otturatore (distributore), una turbina idraulica ad azione (turbina Pelton, V. par. 5.9, cap. 5) ed esaminiamo i fenomeni che si verificano nell'impianto per una variazione di portata ottenuta agendo sull'otturatore; in particolare, si farà riferimento ad una chiusura totale a partire da una condizione di regime permanente (fig. 13.1).

a) La condotta forzata, diventa sede di una serie di oscillazioni di pressione e di velocità che si propagano dalla sezione A alla sezione B e viceversa con notevole celerità ( $\sim 1000$  m/s); la manovra di chiusura e tutto il transitorio che l'accompagna - oscillazioni elastiche o colpo d'ariete - hanno durate così brevi da poter ritenere che durante tale fenomeno il livello nel pozzo piezometrico rimanga praticamente costante.

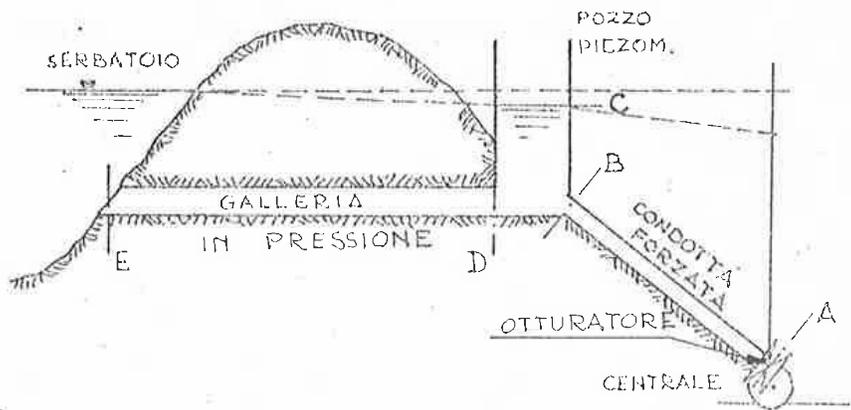


Fig. 13.1

b) Il sistema galleria in pressione - pozzo piezometrico diventa sede di una serie di oscillazioni di massa, di periodo estremamente maggiore di quello delle oscillazioni elastiche. In generale, le oscillazioni di massa iniziano con ritardo rispetto al completamento della manovra di chiusura e possono essere considerate indipendenti dalle oscillazioni elastiche e successive a queste. Il fenomeno in esame è schematizzabile come segue: esaurito il transitorio di colpo d'ariete, il livello nel pozzo piezometrico

- si alza in quanto la velocità nella galleria è ancora diretta nel senso del moto permanente;
  - raggiunge una quota massima in corrispondenza della quale la velocità nella galleria si annulla;
  - inverte il movimento e si abbassa, mentre la velocità nella galleria presenta senso contrario a quello del moto permanente;
- e così via. Si ha, di conseguenza, una serie continua di oscillazioni di livel-

(\*) - La descrizione dei fenomeni e gli schemi analitici di seguito introdotti possono essere completati ed adattati per interpretare transitori di moto vario di altri impianti idraulici.

lo nel pozzo piezometrico e di oscillazioni di velocità nella galleria in pressione che danno luogo alle oscillazioni di massa nel sistema predetto.

A) OSCILLAZIONI DI MASSA

13.3 - Per lo studio delle oscillazioni di massa si può prescindere, per quanto precedentemente detto, dalla condotta forzata e considerare l'otturatore agente direttamente nella sezione B (fig. 13.2). Inoltre, poichè nel fenomeno in esame non intervengono in modo apprezzabile la comprimibilità del fluido e l'elasticità della galleria in pressione, si può ritenere

$$(13.5) \quad Q = \text{cost} ;$$

$$\Omega_{,t} = 0$$

Contando il tempo  $t$  a partire dall'inizio della manovra di variazione della portata e supponendo tale manovra (di chiusura) istantanea, si ha

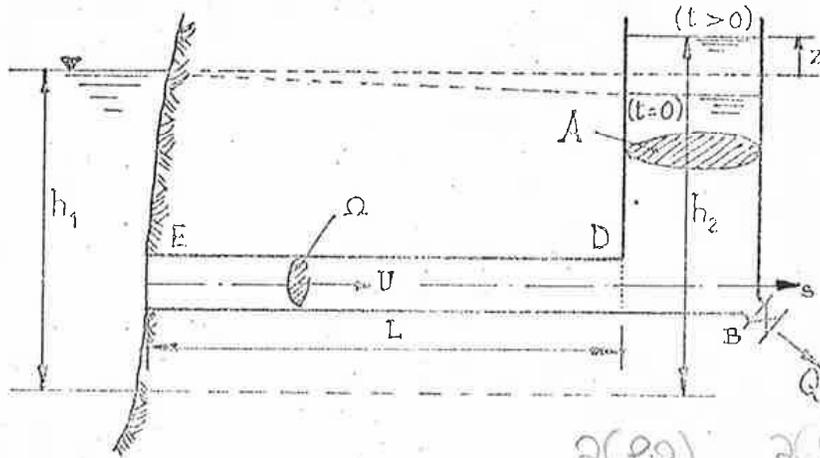


Fig. 13.2

per  $t \leq 0$  regime permanente  
 per  $t > 0$  transitorio di moto vario

13.4 - Nel transitorio di moto vario l'eq.ne di continuità (13.4) riferita alla galleria in pressione si riduce, per le condizioni (13.5) alla eq.ne differenziale

$$Q_{,s} = 0$$

che integrata fornisce (\*)

$$Q = Q(t)$$

Di conseguenza, la velocità media  $U = Q/\Omega = U(t)$  dipende dal tempo ma non dalla coordinata  $s$  (moto in blocco,  $\partial U/\partial t = dU/dt$ ).

L'eq.ne (13.2), particolarizzata con la eq.ne (13.3) e integrata tra le sezioni E e D fornisce

$$(13.6) \quad h_1 - h_2 = \frac{1}{g} \frac{dU}{dt} L + \frac{\lambda}{D} \frac{U|U|}{2g} L$$

(\*) - Nel regime permanente risulta  $Q_{,s} = dQ/dt = 0$  e quindi  $Q = \text{cost}$ .

avendo assunto nella sezione D, anche durante il transitorio, il carico effettivo  $H_2$  pari al carico piezometrico  $h_2$ .  
Tenuto conto che

$$h_1 - h_2 = -z$$

(l'asse  $z$  è verticale, positivo verso l'alto con l'origine al livello del pelo libero nel serbatoio) e

$$(13.7) \quad U \Omega dt = A dz \quad ; \quad U = \frac{A}{\Omega} \frac{dz}{dt} \quad ; \quad \frac{dU}{dt} = \frac{A}{\Omega} \frac{d^2z}{dt^2}$$

(nel tempo  $dt$  entra nel pozzo piezometrico il volume  $U \Omega dt$  di liquido che provoca un innalzamento  $dz$  del livello), l'eq.ne (13.6) diventa

$$(13.8) \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\lambda}{2D} \frac{A}{\Omega} \frac{dz}{dt} \left| \frac{dz}{dt} \right| + \frac{g\Omega z}{AL} = 0$$

L'eq.ne (13.8) non è lineare e si integra solo numericamente per differenze finite. Le condizioni iniziali da associare a tale eq.ne risultano

$$(13.9) \quad \text{per } t = 0 : \quad z = -z_0 \quad ; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\Omega}{A} U_0$$

essendo le grandezze  $z_0$  e  $U_0$  relative al regime permanente ( $z_0$  rappresenta la perdita di energia meccanica per unità di peso tra le sezioni E e D). L'eq.ne (13.8) interpreta le oscillazioni di livello nel pozzo piezometrico mentre le oscillazioni di velocità nella galleria in pressione si ottengono dalla seconda delle eq.ni (13.7). Per la presenza delle dissipazioni le oscillazioni risultano smorzate e il transitorio di moto vario si esaurisce dopo un intervallo di tempo pari a  $\sim (2+3) T^*$ , avendo indicato con  $T^*$  il periodo delle oscillazioni del sistema galleria in pressione-pozzo piezometrico in assenza di perdite (V. eq.ne 13.14).

13.5 - Se si trascurano le dissipazioni nella galleria in pressione ( $\lambda = 0$ ), l'eq.ne (13.8) e le condizioni iniziali (13.9) si riducono a

$$(13.10) \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0$$

$$(13.11) \quad \text{per } t = 0 : \quad z = 0 \quad ; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\Omega}{A} U_0$$

in cui  $\omega^2 = g \Omega / AL$ . L'integrale generale dell'eq.ne (13.10) risulta

$$z = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

che, tenuto conto delle condizioni iniziali, si particolarizza nella eq.ne

$$(13.12) \quad z = z^* \sin \omega t \quad \text{con } z^* = \sqrt{\frac{L\Omega}{gA}} \cdot U_0$$

alla quale si associa la seconda delle eq.ni (13.7), che diventa

$$(13.13) \quad U = U_0 \cos \omega t$$

Le oscillazioni del livello nel pozzo piezometrico e le oscillazioni di velocità nella galleria in pressione sono non smorzate con periodo  $T^*$ :

$$(13.14) \quad T^* = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{A L}{g \cdot \Omega}}$$

che dipende dalle caratteristiche geometriche del sistema galleria in pressione-pozzo piezometrico.

#### B) OSCILLAZIONI ELASTICHE - COLPO D'ARIETE

13.6 - Prima di iniziare lo studio del colpo d'ariete, ricaviamo l'espressione della CELERITA'  $c$  (velocità di propagazione) di una perturbazione rappresentata analiticamente da una funzione  $F(s,t)$  dello spazio e del tempo. La funzione  $F(s,t)$  si propaga se per ogni coppia di valori  $(s,t)$  risulta

$$(13.15) \quad F(s + ds, t + dt) = F(s,t)$$

essendo  $ds$  e  $dt$  correlati tra loro attraverso la celerità  $c$ , cioè

$$ds/dt = c$$

L'eq.ne (13.15) è equivalente, in termini differenziali, alla eq.ne

$$dF = F(s + ds, t + dt) - F(s,t) = 0$$

che conduce alla eq.ne

$$\frac{dF}{dt} = F_{,t} + \frac{ds}{dt} F_{,s} = F_{,t} + c F_{,s} = 0$$

dalla quale si ottiene la seguente espressione per  $c$

$$(13.16) \quad c = - F_{,t} / F_{,s}$$

Dividendo l'eq.ne (13.16) per la velocità media di trasporto  $U$  del moto entro la condotta forzata risulta che termini del tipo  $\left| \frac{U F_{,s}}{F_{,t}} \right|$  stanno a termini del tipo  $\left| \frac{F_{,s}}{F_{,t}} \right|$  nel rapporto  $\left| \frac{U}{c} \right|$ . Poichè nel transitorio del colpo d'ariete la velocità media di trasporto  $U$  ha valori trascurabili rispetto alla celerità  $c$  delle perturbazioni ( $U/c < \sim 0,01$ ) si ha

$$(13.17) \quad \left| \frac{U F_{,s}}{F_{,t}} \right| \text{ trascurabile rispetto a } \left| \frac{F_{,s}}{F_{,t}} \right|$$

13.7 - LE EQ.NI DIFFERENZIALI DEL COLPO D'ARIETE. Riprendiamo in esame lo schema di fig. 13.1 considerando il sistema pozzo piezometrico-condotta forzata-otturatore. Esaminiamo il transitorio di moto vario che si ha nella condotta forzata in conseguenza di una variazione di portata ottenuta agendo sull'otturatore; la manovra sull'otturatore può essere sia di chiusura sia di apertura e si completa in un intervallo di tempo  $\mathcal{T}$  che, in generale, non è trascurabile se confrontato con l'intervallo di tempo del transitorio.

Lo studio viene qui effettuato ritenendo:

1. il fluido ideale in quanto, se si eccettua il caso - del resto raro - di condotte forzate molto lunghe, le resistenze non hanno modo di influenzare sensibilmente il processo di moto e possono perciò essere trascurate;
2. il fluido elastico con comportamento barotropico;
3. trascurabile l'altezza generatrice della velocità media rispetto al carico piezometrico in quanto tale altezza è dell'ordine di 1+2 m mentre il carico piezometrico è, in generale, dell'ordine delle decine e centinaia di m;
4. la condotta forzata elastica, di diametro e spessore costanti;
5. il livello nel pozzo piezometrico costante (V. par. 13.2).

Per le condizioni poste, l'eq.ne del moto si ottiene dalla eq.ne (13.1) e risulta, posto  $\beta = 1$ ,

$$(13.18) \quad h_{,s} = -\frac{1}{g} U_{,t}$$

$$U(\rho\Omega)_{,s} \ll (\rho\Omega)_{,t}$$

mentre l'eq.ne di continuità (13.4) può essere scritta nella forma (essendo  $Q = U\Omega$ )

$$(\rho U\Omega)_{,s} + (\rho\Omega)_{,t} = 0 \quad U(\rho\Omega)_{,s} + \rho\Omega U_{,s} + (\rho\Omega)_{,t} = 0$$

che fornisce, tenuto conto della condizione (13.17),

$$(13.19) \quad \rho\Omega U_{,s} + \rho\Omega_{,t} + \Omega\rho_{,t} = 0$$

$$\rho\Omega U_{,s} + \rho\Omega_{,t} + \Omega\rho_{,t} = 0$$

Introducendo l'asse  $x$  con origine nella sezione di sbocco A della condotta forzata e orientato in senso contrario a quello del moto permanente, cioè  $x = L - s$  (fig. 13.3) (\*), le eq.ni (13.18), (13.19) diventano

$$(13.20) \quad h_{,x} = \frac{1}{g} U_{,t}$$

$$\rho\Omega_{,t} + \Omega\rho_{,t} = \rho\Omega U_{,x}$$

Le due eq.ni (13.20) presentano quattro funzioni incognite:  $h$ ,  $U$ ,  $\rho$ ,  $\Omega$ . Utilizzando altre due eq.ni, la prima che considera l'elasticità del fluido e la seconda che tiene conto della elasticità della condotta, è possibile far comparire nelle eq. (13.20) le due so-

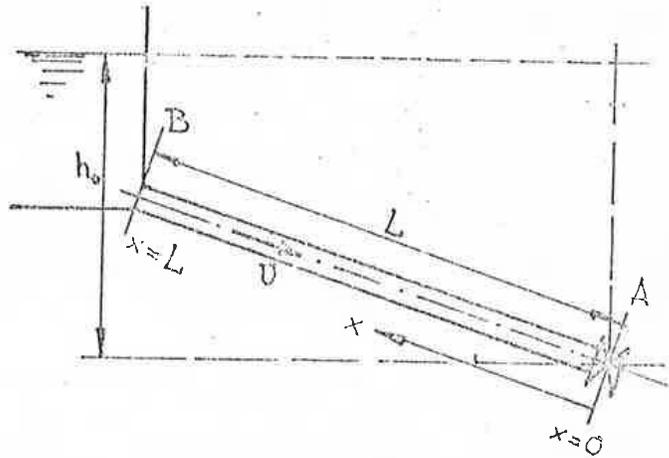


Fig. 13.3

(\*) - Nella figura il piano orizzontale di riferimento per i carichi piezometrici è stato scelto passante per il baricentro della sezione di sbocco. Tale scelta, qui non necessaria, diventa essenziale nel seguito (V. eq.ni 13.30, 13.31).

le funzioni incognite  $h = h(x,t)$ ,  $U = U(x,t)$ . Risulta

(13.21)  $\rho_{,t} = \frac{\rho}{e} \gamma h_{,t}$  *fluido barotropico*

(13.22)  $\Omega_{,t} = \frac{\Omega D}{s E} \gamma h_{,t}$

$\rho_{,t} = \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{dt} = \frac{\rho}{e} \gamma h_{,t}$

L'eq.ne (13.21) si ottiene osservando che

$\rho_{,t} = \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial t}$  (fluido a comp. barotropico)

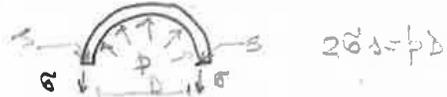
$\frac{d\rho}{dp} = \frac{\rho}{e}$   
 $e = \frac{dp}{\frac{d\rho}{\rho}}$

$\frac{d\rho}{dp} = \frac{\rho}{e}$  ( $e =$  modulo di compr., V. eq.ne 1.3, cap. 1)

$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int \frac{dp}{\gamma} + z \right) = \frac{d}{dp} \int \frac{dp}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t}$  e quindi  $\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma \frac{\partial h}{\partial t}$

L'eq.ne (13.22) si deduce a partire dalla relazione di Mariotte

$\sigma = pD/2s$



che correla la tensione  $\sigma$ , ritenuta distribuita uniformemente entro lo spessore  $s$  della condotta, con la pressione  $p$  e le caratteristiche geometriche  $s$  e  $D$  della condotta stessa. Un incremento  $\delta p$  di pressione provoca l'incremento  $\delta \sigma = D \delta p / 2s$  della tensione con una deformazione lineare unitaria ( $E =$  modulo di elasticità della condotta)

$\frac{\delta \sigma}{\sigma} = \frac{\delta p}{p} = \frac{D \delta p}{2s \sigma} \Rightarrow \frac{\delta \sigma}{\sigma} = \frac{D \delta p}{2s E \delta l} \Rightarrow \frac{\delta \sigma}{\sigma} = \frac{D \delta p}{2s E}$

alla quale corrisponde una variazione relativa di sezione ( $\Omega \sim l^2$ )

$\frac{\delta \Omega}{\Omega} = 2 \frac{\delta l}{l} = \frac{D \delta p}{s E}$

$\Omega_{,t} = \frac{2D}{sE} \gamma h_{,t}$

che conduce alla eq.ne

$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\Omega D}{s E} \frac{\partial p}{\partial t}$

e quindi alla eq.ne (13.22).

Con le eq.ni (13.21), (13.22) il sistema (13.20) si trasforma nel seguente

$h_{,x} = \frac{1}{g} U_{,t}$

$h_{,x} = \frac{1}{g} U_{,t}$

(13.23)

$h_{,t} \cdot \left( \frac{\rho}{e} + \frac{\rho D}{s E} \right) = \frac{1}{g} U_{,x}$

$\rho \Omega_{,t} + \rho \rho_{,t} = \rho \rho U_{,x}$

$\rho \frac{\Omega D}{s E} \gamma h_{,t} + \rho \frac{\rho}{e} \gamma h_{,t} = \rho \rho U_{,x}$

$h_{,t} \left( \frac{\rho D}{s E} + \frac{\rho}{e} \right) = \frac{1}{g} U_{,x}$

Posto  $1/a^2 = Q/e + QD/Es$  cioè (\*)

$$(13.24) \quad a = \frac{\sqrt{e/g}}{\sqrt{1 + eD/sE}}$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{\frac{Q}{e} + \frac{QD}{sE}}} = \frac{\sqrt{e/g}}{\sqrt{1 + \frac{eD}{sE}}}$$

segue il SISTEMA SEMPLIFICATO DELLE EQ.NI DIFFERENZIALI DEL COLPO D'ARIETE

$$(13.25) \quad \begin{cases} h_{,x} = \frac{1}{g} U_{,t} \\ h_{,t} = \frac{a^2}{g} U_{,x} \end{cases} \quad \begin{cases} h_{,x} = \frac{1}{g} U_{,t} \\ h_{,t} = \frac{e^2}{g} U_{,x} \end{cases}$$

Ad esso vanno associate le CONDIZIONI INIZIALI e le CONDIZIONI AL CONTORNO.

Le condizioni iniziali risultano

$$(13.26) \quad \text{per } t = 0 : \quad h = h_0 ; \quad U = U_0$$

valutando il tempo  $t$  a partire dall'istante di inizio della manovra di variazione della portata e indicando con  $h_0$  e  $U_0$  i valori di  $h$  e  $U$  nel regime permanente.

Le condizioni al contorno sono relative alla sezione di imbocco B e alla sezione di sbocco A. Si ha

a) per la sezione B ( $x = L$ )

$$(13.27) \quad h = h_0$$

eq.ne che deriva dalla costanza del livello del liquido nel pozzo piezometrico per la durata del transitorio di moto vario;

b) per la sezione di sbocco A ( $x = 0$ )

$$(13.28) \quad U/U_0 = \eta \sqrt{h/h_0}$$

in cui  $\eta = \eta(t)$  è il grado di chiusura (o di apertura) dell'otturatore ed è espresso dal rapporto

$$(13.29) \quad \eta = \omega/\omega_0 = \frac{\omega(t)}{\omega_0}$$

tra l'area della sezione di efflusso dell'otturatore al tempo  $t > 0$  considerato e l'area della sezione di efflusso nel regime permanente ( $t \leq 0$ ). Alla eq.ne (13.28) si perviene schematizzando l'otturatore come una luce in parete sottile di diametro variabile e facendo il rapporto tra le eq.ni

$$(13.30) \quad Q_0 = U_0 \Omega_0 = m_0 \omega_0 \sqrt{2g h_0}$$

(\*) - Con  $a$  (senza  $\pm$ ) si intende il valore assoluto di tale grandezza.

$$(13.31) \quad Q = U \Omega_0 = m_0 \omega \sqrt{2gh}$$

che esprimono la condizione di continuità nella forma della costanza della portata volumetrica tra la sezione A' della condotta e la sezione contratta A<sub>c</sub> del getto (fig. 13.4), nel regime permanente e nel transitorio di moto vario (in questo ultimo caso viene trascurata la variazione di densità nel breve tronco considerato). Inoltre, nella (13.31) si sono adottati per  $\Omega$  e  $m$  (coefficiente di portata) i valori  $\Omega_0$  e  $m_0$  relativi al regime permanente. Le eq.ni (13.30), (13.31) richiedono che il piano orizzontale di riferimento dei carichi piezometrici passi per il baricentro della sezione di efflusso, coincidente praticamente con il baricentro della sezione contratta del getto.

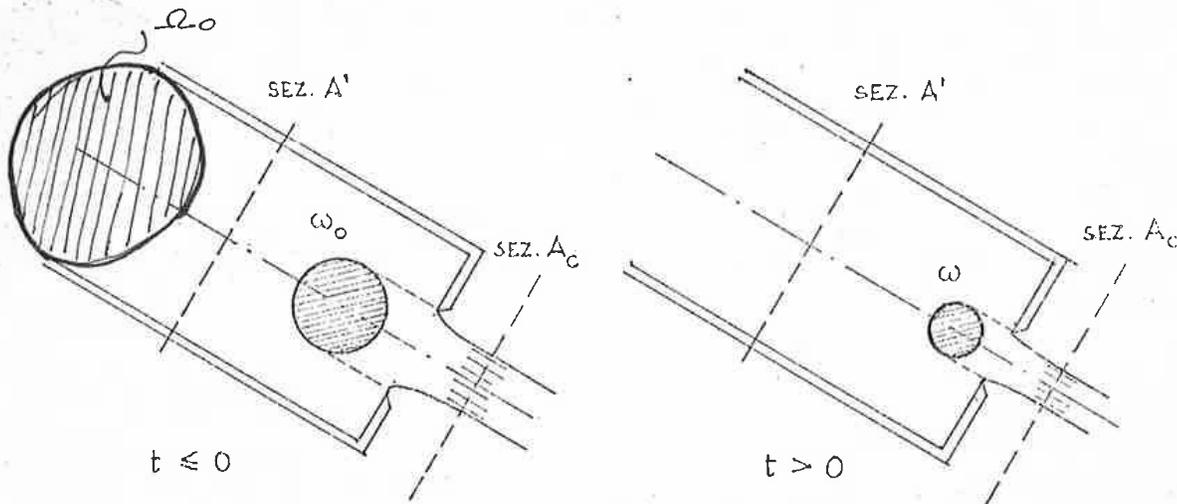


Fig. 13.4

13.8 - La grandezza dimensionale  $a$  definita, come indica l'eq.ne (13.24), dalle caratteristiche  $\rho$ ,  $e$  del fluido e dalle caratteristiche  $D$ ,  $s$ ,  $E$  della condotta fornisce la celerità di tutte le perturbazioni (e in particolare di  $h$  e  $U$ ) che si propagano durante il transitorio di moto vario, come si dimostrerà in seguito. La  $a$  non risente praticamente delle variazioni delle caratteristiche predette conseguenti alle rapide variazioni di pressione durante tale transitorio. Risulta (\*)

- per condotte perfettamente rigide ( $E \rightarrow \infty$ ) percorse da acqua (\*\*)

$$(13.32) \quad a = \sqrt{e/\rho} \cong 1400 \text{ m.s}^{-1}$$

(\*) - I valori riportati convalidano l'assunzione (13.17) del par. 13.6 essendo la velocità media di trasporto  $U$  dell'ordine, al più, di qualche m/s.

(\*\*) - La situazione è equivalente a mezzo fluido indefinito.

- per condotte elastiche di acciaio (con  $E/e \cong 100$  ,  $D/s \sim 100$ ) percorse da acqua

$$(13.33) \quad a = \frac{\sqrt{e/\rho}}{\sqrt{1 + eD/SE}} \cong 1000 \text{ m/s} .$$

13.9 - LE EQ.NI INTEGRALI DEL COLPO D'ARIETE. Per ricavare dal sistema (13.25) gli integrali generali, si costruiscono a partire dal sistema predetto due eq.ni differenziali, una in  $h$  l'altra in  $U$ , e si opera l'integrazione di tali eq.ni. Qui si sviluppa in dettaglio il procedimento per ricavare la  $h = h(x,t)$ ; in modo analogo si procede per ottenere la  $U = U(x,t)$ .

Si deriva la prima eq.ne del sistema (13.25) rispetto a  $x$  e la seconda eq.ne rispetto a  $t$ . Dopo aver sommato la prima alla seconda divisa per  $a^2$ , segue

$$(13.33) \quad h_{,xx} - \frac{1}{a^2} h_{,tt} = 0$$

Handwritten notes:  $\frac{\partial}{\partial x}(h_{,x} = \frac{1}{a^2} U_{,t})$  and  $\frac{\partial}{\partial t}(h_{,t} = \frac{1}{a^2} U_{,x}) \Rightarrow h_{,xx} = \frac{1}{a^2} h_{,tt}$  c.v.d.

che è una eq.ne differenziale alle derivate parziali lineare del secondo ordine, omogenea di tipo iperbolico. Essa ammette due famiglie di curve caratteristiche reali (\*) le cui eq.ni si ottengono dall'integrazione dell'eq.ne

$$dt^2 - \frac{1}{a^2} dx^2 = 0$$

e risultano, assunto "a" costante, (\*\*)

$$(13.34) \quad x = at + cost$$

$$(13.35) \quad x = -at + cost$$

Le eq.ni (13.34), (13.35) consentono di definire due nuove variabili

$$(13.36) \quad \xi_1 = t - x/a ; \quad \xi_2 = t + x/a$$

che rimangono costanti sulle curve caratteristiche e che introdotte nella eq.ne (13.33) la trasformano nella eq.ne canonica

$$\partial^2 h / \partial \xi_1 \partial \xi_2 = 0$$

(\*) - Tali curve non devono confondersi con le omonime che, nella teoria delle eq.ni differenziali ordinarie del 1° ordine, rappresentano le curve integrali.

(\*\*) - Lungo le curve caratteristiche, qui rappresentate da rette, il problema di Cauchy risulta indeterminato. Cioè note su una qualsiasi curva caratteristica nel piano orario  $(x,t)$  le funzioni  $h$ ,  $\partial h / \partial x$ ,  $\partial h / \partial t$ , che individuano una striscia nello spazio  $(h,x,t)$ , esistono due o più superficie integrali  $h = h(x,t)$  della eq.ne (13.22) che aderiscono a tale striscia.

che è la forma normale dell'eq.ne di D'Alembert di cui si conosce l'integrale generale. Risulta, tenendo conto della prima delle condizioni iniziali (13.26),

$$(13.37) \quad h(x,t) = h_0 + F(\xi_1) - f(\xi_2) = h_0 + F(t - x/a) - f(t + x/a)$$

in cui  $F(\xi_1)$  e  $f(\xi_2)$  sono funzioni arbitrarie che si propagano.

Operando analogamente per la U si ha, tenendo conto della seconda delle condizioni iniziali (13.26),

$$(13.38) \quad U(x,t) = U_0 - (g/a) [F(\xi_1) + f(\xi_2)] = U_0 - (g/a) [F(t-x/a) + f(t+x/a)]$$

in cui compaiono le stesse funzioni arbitrarie dell'eq.ne (13.37) dato il vincolo imposto dal sistema (13.25).

Le funzioni  $F(\xi_1)$ ,  $f(\xi_2)$  (e quindi le funzioni h,U) :

- si propagano rispettivamente con le celerità  $c_F = +a$ ,  $c_f = -a$  (\*) ; infatti

$$c_F = - \frac{F, t}{F, x} = - \frac{F, \xi_1}{F, \xi_1} \frac{\xi_1, t}{\xi_1, x} = +a ; \quad c_f = - \frac{f, t}{f, x} = - \frac{f, \xi_2}{f, \xi_2} \frac{\xi_2, t}{\xi_2, x} = -a$$

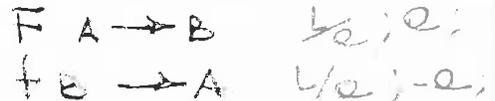
- sono determinabili in base alle condizioni al contorno ;

- sono naturalmente nulle nelle condizioni di regime permanente (\*\*).

In particolare, la funzione F nasce nella sezione di sbocco A ( $x = 0$ ) allo istante  $t = 0$  (inizio della manovra dell'otturatore) e si propaga verso la sezione di sbocco B ( $x = L$ ) con la celerità  $+a$  ; in una sezione generica distante  $x$  da A, le funzioni h e U mantengono i valori  $h_0$  e  $U_0$  fino al tempo  $x/a$ ; dopo tale tempo essi vengono modificati dall'intervento della F. Questa giunge nella sezione B al tempo  $L/a$  e origina in tale sezione una funzione f che si propaga con la celerità  $-a$  verso la sezione A dove giunge al tempo

(13.39)

$$\tau = 2L/a$$



Il tempo  $\tau$  è la DURATA DI FASE e rappresenta, per quanto predetto, il tempo che impiega una perturbazione a percorrere in andata e ritorno la condotta forzata.

13.10 - COLPO D'ARIETE DIRETTO è il transitorio di moto vario che si ha nella condotta forzata durante la prima fase  $\tau$ .

Nella sezione di sbocco A per tutta la durata del colpo d'ariete diretto la funzione f si mantiene nulla per cui le eq.ni integrate del colpo d'ariete (13.37), (13.38) si riducono a

(\*) - A rigori, le F e f si propagano con le velocità assolute  $c_F = U+a$ ,  $c_f = U-a$ ; tuttavia essendo U del tutto trascurabile rispetto a  $\pm a$ , è giusto ficato assumere  $c_F = a$ ,  $c_f = -a$ .

(\*\*) - Poichè  $\xi_1 = \text{cost.}$   $\xi_2 = \text{cost.}$  sulle curve caratteristiche, anche  $F(\xi_1)$  e  $f(\xi_2)$  rimangono costanti sulle stesse curve.

$f B \rightarrow A$  j-e  
per cui nel tempo  $\tau \leq \tau_0$   
f=0 in A

$$h(t) = h_0 + F(t)$$

$$U(t) = U_0 - \frac{a}{g} F(t)$$

$$(x = 0; t \leq \tau_0)$$

che forniscono

$$(13.40) \quad h(t) - h_0 = \frac{a}{g} (U - U_0) \quad (x = 0; t \leq \tau_0)$$

eq.ne valida (nei limiti predetti) per una manovra dell'otturatore sia di chiusura sia di apertura. La manovra dell'otturatore è BRUSCA se si completa in un tempo  $\tau$  minore della durata di fase  $\tau_0$  cioè

$$(13.41) \quad \tau \leq \tau_0 \quad (\text{manovra brusca})$$

mentre è LENTA se si completa in un tempo  $\tau$  maggiore della durata di fase  $\tau_0$ , cioè

$$(13.42) \quad \tau > \tau_0 \quad (\text{manovra lenta})$$

13.11 - CHIUSURA TOTALE BRUSCA. FORMULA DI JOUKOWSKI. Nell'intervallo di tempo  $0 \leq t < \tau$  ( $\tau \leq \tau_0$ ) il valore del sovraccarico  $h-h_0$  nella sezione di sbocco A è fornito dalla eq.ne (13.40) nella quale il valore di U decresce con il tempo t raggiungendo il valore zero per  $t = \tau$ . A partire da tale istante, il sovraccarico è dato da

$$(13.43) \quad h_{\max} - h_0 = \frac{a}{g} U_0 \quad \text{S. JOUKOWSKI}$$

e mantiene questo valore massimo sino al tempo  $t = \tau_0$ .

L'eq.ne (13.43) è una forma dell'espressione di Joukowski

$$(13.44) \quad p_{\max} - p_0 = \rho a U_0$$

che fornisce la sovrappressione.

Come mostra l'eq.ne (13.43) il tempo di chiusura brusca  $\tau$  non influenza il valore del massimo sovraccarico. Dal valore di  $\tau$ , tuttavia, dipende:

- la durata ( $\tau_0 - \tau$ ) del massimo sovraccarico nella sezione di sbocco (tale durata aumenta al diminuire di  $\tau$ );
- il tratto  $\bar{x} = L - a\tau/2$  di condotta interessato dal massimo sovraccarico(\*) (il valore di  $\bar{x}$  aumenta al diminuire di  $\tau$ ; per  $\tau \rightarrow 0$ ,  $\bar{x} \rightarrow L$ ).

Si osserva, infine, che durante l'oscillazione del carico piezometrico dopo la prima fase, (V. par. successivo), la pressione nella sezione di sbocco (ed eventualmente per un tratto di condotta) può scendere al disotto della pressione atmosferica; ciò si verifica se  $h_{\max} - h_0 > h_0$ .

(\*) - La sezione della condotta individuata da  $\bar{x}$  rappresenta la sezione  $\bar{S}$  in corrispondenza della quale arriva la situazione  $U = 0$  nell'istante in cui la  $f$  è ancora (al limite) eguale a zero. Risulta:  $t' = \tau + \bar{x}/a$  = tempo necessario affinché la situazione  $U = 0$  arrivi alla sezione  $\bar{S}$ ;  $t'' = L/a + (L - \bar{x}/a)$  = tempo in cui  $f = 0$  nella sezione  $\bar{S}$ ; dall'eguaglianza  $t' = t''$  si ricava il valore di  $\bar{x}$ .

13.12 - MANOVRE LENTE. EQ.NI CONCATENATE DI ALLIEVI. Riprendiamo in esame le eq.ni integrali del colpo d'ariete (13.37), (13.38); la condizione al contorno (13.27) consente di eliminare una delle due funzioni arbitrarie che compaiono in tali eq.ni. Infatti, dalla eq.ne (13.37), dovendo essere  $h = h_0$  per  $x = L$ , si ha

$$f(t + L/a) = F(t - L/a) ; \quad f(t + L/a) = F(t + L/a - \vartheta)$$

ossia, per l'arbitrarietà di  $t$ ,

$$f(\text{arg.}) = F(\text{arg.} - \vartheta)$$

e quindi

$$(13.45) \quad f(t + x/a) = F(t + x/a - \vartheta)$$

Tenendo conto dell'eq.ne (13.45), le eq.ni (13.37), (13.38) scritte per la sezione di sbocco A si trasformano nelle

$$(13.46) \quad h(t) - h_0 = F(t) - F(t - \vartheta) \quad (x = 0)$$

$$(13.47) \quad U(t) - U_0 = -(g/a) [F(t) + F(t + \vartheta)]$$

Scelta una successione di tempi  $t_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) tale che sia

$$0 < t_1 \leq \vartheta ; \quad t_2 = t_1 + \vartheta ; \quad t_3 = t_2 + \vartheta ; \quad \dots ; \quad t_i = t_{i-1} + \vartheta$$

e introdotta la condizione al contorno (13.28), dalle eq.ni (13.46), (13.47) segue, dopo alcune elaborazioni,

$$(13.48) \quad z_i^2 + z_{i-1}^2 - 2 = 2 N_A ( \eta_{i-1} z_{i-1} - \eta_i z_i ) \quad (x = 0)$$

essendo:

$$z_i^2 = h_i/h_0 \quad (h_i = \text{carico piezometrico al tempo } t_i)$$

$$N_A = a U_0 / 2gh_0 = \text{numero di Allievi}$$

Le eq.ni (13.48) sono le EQ.NI CONCATENATE DI ALLIEVI; esse consentono la determinazione nella sezione di sbocco dei valori del carico piezometrico in una serie di istanti  $t_i$  distanziati tra di loro di una durata di fase e per manovre dell'otturatore - di chiusura o di apertura - sia BRUSCHE sia LENTE.

Nel caso di manovra di chiusura totale, per tutti gli istanti successivi alla fine della manovra ( $t_{i-1} \geq \vartheta$ ) le eq.ni (13.48) forniscono

$$h_{i-1}/h_0 + h_i/h_0 - 2 = 0$$

che dimostrano la simmetria dei valori  $h_{i-1}$  e  $h_i$  rispetto ad  $h_0$ . Cioè il carico piezometrico  $h$  oscilla attorno al valore  $h_0$  con periodo  $2\vartheta$  e con ampiezze non smorzate in quanto il sistema è chiuso e, nello schema adottato, non dissipativo.

13.12 - CHIUSURA TOTALE LENTA. FORMULA APPROSSIMATA DI MICHAUD-ALLIEVI. Per una valutazione approssimata del massimo sovraccarico nella sezione di sbocco A dovuto ad una chiusura totale lenta ( $\tau > \vartheta$ ) si può utilizzare la formula di Michaud-Allievi

$$(13.49) \quad h_{\max} - h_0 = 2 L U_0 / g \tau \quad (x = 0)$$

Essa si basa sulle due ipotesi:

a) che il massimo sovraccarico si verifichi alla fine della prima fase e quindi al limite del colpo d'ariete diretto ( $h_{\max} = h_1$ , condizione in generale verificata);

b) che la velocità  $U$  nella condotta in corrispondenza alla sezione di sbocco vari linearmente con il tempo (condizione in generale non verificata) (\*).

- Per la ipotesi a) il massimo sovraccarico è dato dalla eq.ne (13.40) particolarezzata nella

$$(13.50) \quad h_{\max} - h_0 = h_1 - h_0 = a/g (U_0 - U_1)$$

- Per la ipotesi b) la differenza ( $U_0 - U_1$ ) si ottiene dalla (fig. 13.5)

$$(13.51) \quad (U_0 - U_1) / U_0 = \vartheta / \tau$$

Dalle eq.ni (13.50) (13.51) segue l'eq.ne (13.49). L'ipotesi b) è prudentiale (formula approssimata per eccesso) in quanto, ammessa una variazione lineare con il tempo del grado di chiusura  $\eta$ , per una variazione lineare di  $U$  dovrebbe mantenersi nella sezione di sbocco  $h_1 = h_0$  mentre è senz'altro  $h_1 > h_0$  (quindi  $U_1$  effettivo è maggiore del valore ipotizzato).

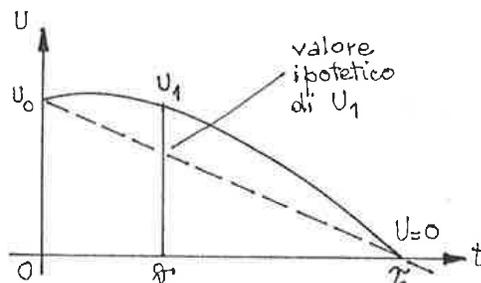


Fig. 13.5

13.13 - METODO DELLE CARATTERISTICHE. Con riferimento al sistema semplificato (13.25) delle eq.ni differenziali del colpo d'ariete, eseguiamo il prodotto della prima eq.ne per l'operatore  $\Delta$  (da precisare) e sommiamola con la seconda. Risulta

$$(13.52) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \Delta \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\Delta}{g} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{a^2}{\Delta} \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

(\*) - In effetti è sufficiente che la  $U$ , pur non variando linearmente, assuma per  $t = \vartheta$  un valore pari a quello che avrebbe presentato variando linearmente.

Affinchè nella eq.ne (13.52) il primo membro e il termine entro parentesi a secondo membro siano delle derivate totali deve essere contemporaneamente

$$\Delta = dx/dt \quad ; \quad a^2/\Delta = dx/dt$$

cioè

$$\Delta = \pm a$$

Il sistema (13.25) di eq.ni differenziali alle derivate parziali può quindi essere sostituito dalla seguente coppia di eq.ni differenziali ordinarie

$$(13.53) \quad dx/dt = \pm a$$

$$(13.54) \quad dh/dt = \pm (a/g) dU/dt$$

che, integrate, forniscono le eq.ni

$$(13.55) \quad x = \pm at + cost, \text{ opp. in forma adimens.: } t/\mathcal{T} = \pm (1/2) x/L + cost$$

$$(13.56) \quad h = \pm (a/g) U + cost$$

nelle quali i valori delle costanti si determinano in base alle condizioni iniziali.

Le eq.ni (13.55) sono le eq.ni delle due famiglie di curve caratteristiche (rette nel caso considerato) già introdotte (V. eq.ni 13.34, 13.35), mentre le eq.ni (13.56) forniscono il legame tra il carico piezometrico  $h$  e la velocità media di trasporto  $U$  sulle stesse curve. Cioè: un osservatore che si muova sul piano orario  $(x, t)$  lungo la caratteristica  $C^+$  (caratteristica  $x = + at + cost$ ) vede il legame tra  $h$  e  $U$  espresso da  $h = (a/g) U + cost$ ; mentre un osservatore che si muove lungo la caratteristica  $C^-$  (caratteristica  $x = - at + cost$ ) vede il legame tra  $h$  e  $U$  espresso da  $h = -(a/g)U + cost$ . L'osservatore, tuttavia, non conosce separatamente i valori di  $h$  e  $U$  a meno che non gli sia fornita una ulteriore relazione tra tali grandezze: ciò si verifica ad esempio in corrispondenza delle sezioni di imbocco e sbocco dove si hanno le eq.ni (13.27), (13.28).

13.14 - METODO NUMERICO (\*). Consideriamo il piano orario  $(x/L, t/\mathcal{T})$  nel quale le caratteristiche sono rappresentate da rette con coefficiente angolare  $\pm 1/2$  (V. eq.ne 13.55 e fig. 13.6) e studiamo con riferimento a tale piano una manovra lenta ( $\mathcal{T} > \mathcal{T}$ ). Sull'asse delle ascisse, cioè per  $t/\mathcal{T} = 0$ , sono assegnati i valori iniziali (valori del regime permanente)  $h = h_0$ ,  $U = U_0$  mentre sulle rette  $x/L = 0$  e  $x/L = 1$  sono date, rispettivamente, le condizioni al contorno (13.28), (13.27).

Per ogni punto  $P$ , di coordinate generiche  $x/L, t/\mathcal{T}$ , passano due caratteristiche che intersecano in  $N$  e  $Q$  le rette  $x/L = 0$  e  $x/L = 1$ . Su ciascuna di esse vale una delle eq.ni (13.56), ossia

---

(\*) - I par. 13.14 e 13.15 sono tratti dagli "Appunti di Idraulica" del prof. ing. E. Marchi (anno 1968).

su  $C^+$  :  $h_P - (a/g) U_P = h_N - (a/g) U_N$

su  $C^-$  :  $h_P + (a/g) U_P = h_Q + (a/g) U_Q$

Il sistema è risolubile in  $h_P$  e  $U_P$  purchè siano noti i valori di  $h$  e  $U$  in  $N$  e  $Q$ . Questi sono a loro volta determinati dalla risoluzione dei sistemi

$$\begin{cases} h_N + (a/g)U_N = h_M + (a/g)U_M \\ \text{(su MN)} \\ U_N/U_0 = \eta \sqrt{h_N/h_0} \\ \text{(su } x/L = 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_Q - (a/g)U_Q = h_R - (a/g)U_R \\ \text{(su QR)} \\ h_Q = h_0 \text{ (su } x/L = 1) \end{cases}$$

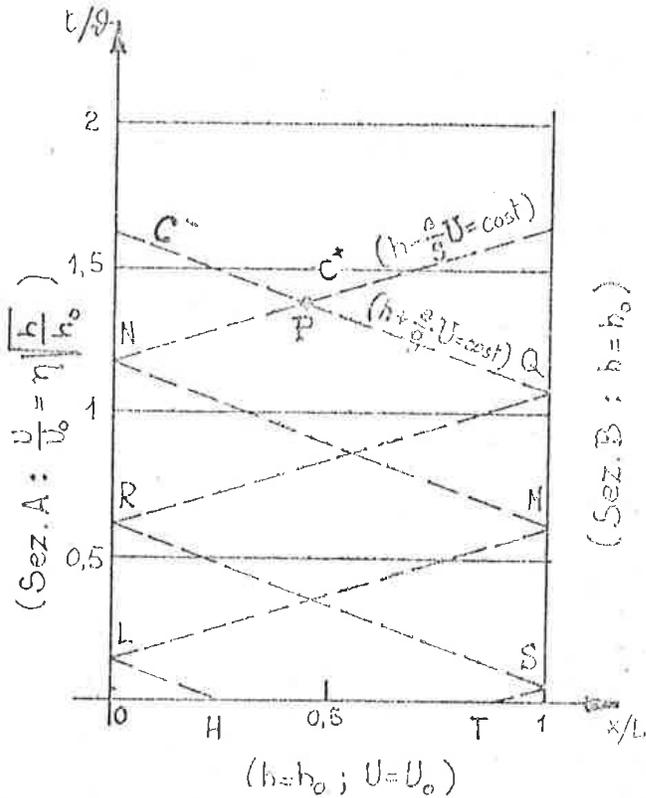


Fig. 13.6

I valori  $h$  e  $U$  in  $N$  e  $Q$  richiedono la conoscenza di quelli in  $M$  e  $R$  e così via, sicchè evidentemente i punti di partenza sono quelli  $H$  e  $T$  su  $t/g_0 = 0$  dove  $h = h_0$   $U = U_0$ .

Il vantaggio del procedimento numerico è quello di essere applicabile anche quando le eq.ni valide sulle caratteristiche siano più complesse delle eq.ni (13.54) e non più integrabili per la presenza, ad esempio, dei termini dovuti alle resistenze. In questo caso si procede per differenze finite scegliendo intervalli  $\Delta t = \Delta x/a$  sufficientemente piccoli da poter trascurare, nei termini predetti, la variabilità di  $U$  (od eventualmente di altre grandezze).

13.15 - METODO GRAFICO.

Può sostituire convenientemente il metodo numerico se sono trascurabili le resistenze e se è sufficiente la valutazione dei carichi nella sola sezione di sbocco  $A$  (come per la soluzione Allievi). Il metodo, dovuto sostanzialmente a Bergeron, presenta la soluzione nel piano delle fasi  $h, U$ . In esso è consuetudine utilizzare lettere, come  $A$  e  $B$ , per indicare le corrispondenti posizioni spaziali, con numeri al piede di ogni lettera per indicare il tempo misurato in fasi (es.:  $A_{1,5}$  la situazione nella sez.  $A$  all'istante  $t = 1,5 \frac{g_0}{a}$ ).

Nel piano  $h, U$  le eq.ni (13.56) sono rappresentate da rette. Precisamente, le

rette  $h = (a/g) U + \text{cost}$  indicano le coppie di valori  $h$  ed  $U$  visti da un osservatore che, per la (13.55), si muove con la celerità  $+a$  (ossia si muove con i valori  $F = \text{cost}$ ,  $V$ . nota (\*\*) pag. 13.11); le rette  $h = -(a/g) U + \text{cost}$  rappresentano  $h$  ed  $U$  visti muovendosi con la celerità  $-a$  (ossia con i valori  $f = \text{cost}$ ). Sullo stesso piano le condizioni al contorno sono rappresentate dalla retta  $h = h_0$  per la sez. B e da parabole, nella sez. A,  $U/U_0 = \eta \sqrt{h/h_0}$  per ogni valore  $\eta = \text{cost}$  (ossia  $t = \text{cost}$ ). Supposto, a titolo di esempio, di eseguire una manovra di chiusura come quella rappresentata nella fig. 13.7, tracciamo le parabole  $\eta = \eta_0$  (passante per

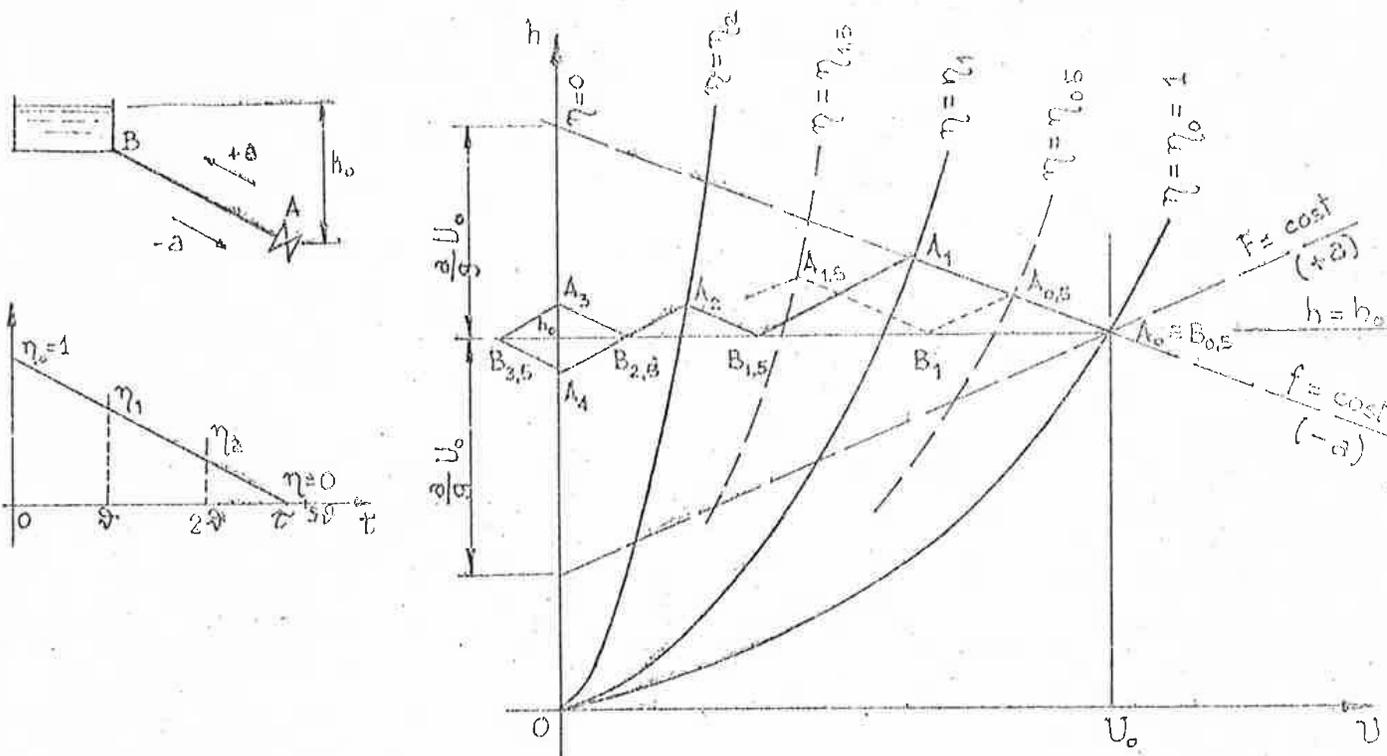


Fig. 13.7

il punto A rappresentante le condiz. iniziali)  $\eta = \eta_1$ ,  $\eta = \eta_2$  ed infine  $\eta = \eta_3 = \dots = \eta_0$  (coincidente con  $U = 0$ ). La situazione nella sez. B all'istante  $0,5 \tau$  è ancora quella iniziale, ossia  $B_{0,5} = A_0$ . Un osservatore che all'istante  $t/\tau = 0,5$  parte da B e procede con celerità  $-a$  vede valori  $h$  ed  $U$  posti sulla retta  $f = \text{cost}$  (di pendenza  $-a/g$ ) passante per  $B_{0,5} = A_0$ . Egli giunge in A all'istante  $t/\tau = 1$  e deve vedere valori  $h$  ed  $U$  posti contemporaneamente sulla retta predetta e sulla parabola  $\eta = \eta_1$  che rappresenta la condiz. in A all'istante considerato. Resta determinato il punto  $A_1$ . Partendo ora all'istante  $t/\tau = 1$  da A e muovendo con celerità  $+a$ , l'osservatore giunge in B all'istante  $t/\tau = 1,5$ . I valori  $h$  ed  $U$  di  $B_{1,5}$  devono stare contemporaneamente sulla retta  $F = \text{cost}$  passante per  $A_1$  e sulla retta  $h = h_0$  (condiz. sez. B). Si procede quindi in maniera analoga, fino alla chiusura, do-

po la quale le parabole si riducono tutte all'asse  $U = 0$ . Il rombo  $B_{2,5} - A_3 - B_{3,5} - A_4$  rappresenta con la diagonale orizzontale l'oscillazione di velocità nella sez. B e con la diagonale verticale l'oscillazione di carico nella sez. A .

Naturalmente la successione dei tempi può essere diversa dagli istanti di ritmo intero (V. fig. 13.7 parte tratteggiata), ma, scelto arbitrariamente l'istante di partenza, i tempi successivi, per i quali vanno tracciate le parabole  $\eta = \eta(t_i) = \text{cost}$ , devono essere necessariamente distanziati fra loro e dal primo di una fase (tempo di andata e ritorno dell'osservatore).

Per altri esempi si rimanda alla Appendice 7 nella quale, inoltre, sono riportate espressioni di  $\eta$  per manovre lineari.